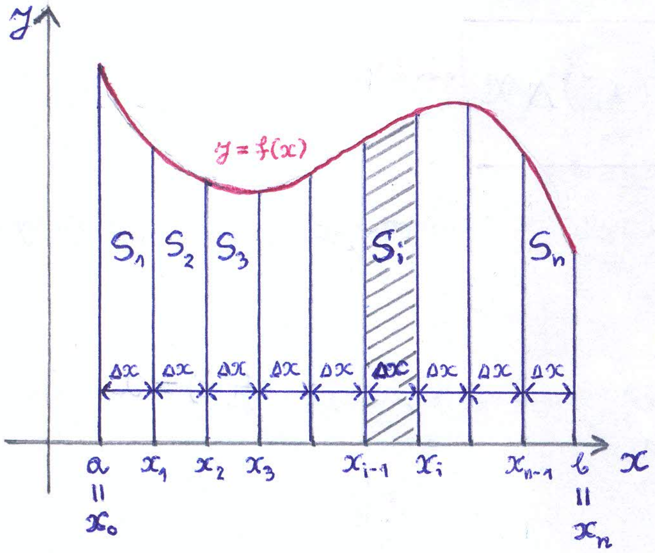
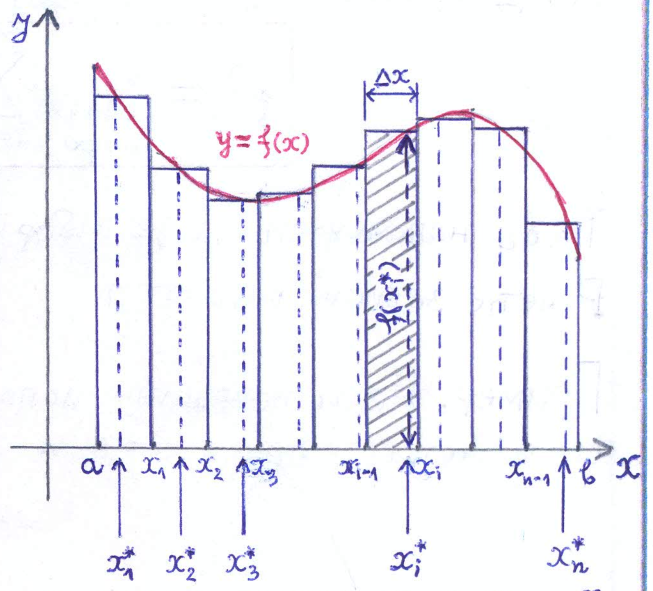
ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ - предавања

* Проблем рачунања површине

Нека је $y=f(x)$ непрекидна функција која је дефинисана на сегменту $[a,b]$. Претпоставићемо да је $f(x)\geq 0$ за свако x из сегмента $[a,b]$ - то значи да се график функције f налази изнад x-осе. Поставља се питање како израчунати површину испод графика функције f, тј. површину ограничену графиком функције f, x-осом и правама $x=a$ и $x=b$.





Сегмент $[a,b]$ делимо на n подсегмената помоћу тачака $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$. Обично стављамо да је $x_0=a$ и $x_n=b$. Добијамо следеће подсегменте:

$$[x_0,x_1],\ [x_1,x_2],\ [x_2,x_3],\ \dots\ [x_{n-1},x_n].$$

Дужина сваког од тих подсегмената је $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. Даље:

$$x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ x_2=a+2\Delta x,\ x_3=a+3\Delta x,\ \dots,\ x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x,\ x_n=b.$$

Дељењем сегмента $[a,b]$, ми смо такође поделили и област испод графика функције $y=f(x)$ на n фигура: $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$. Површина испод графика једнака је збиру површина ових фигура. Нека је x_i^* произвољна тачка подсегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,3,\dots n$. Посматрајмо правоугаоник који има исту основицу као и фигура S_i и чија је висина једнака вредности функције f у тачки x_i^*, тј. висина износи $f(x_i^*)$. Површина тог правоугаоника је једнака $f(x_i^*)\Delta x$, и она апроксимира површину фигуре S_i. Сви правоугаоници заједно чине једну степенасту фигуру чија је површина приближно једнака површини испод графика функције. Површину степенасте фигуре налазимо као збир површина свих правоугаоника:

$$f(x_1^*)\Delta x+f(x_2^*)\Delta x+\dots+f(x_n^*)\Delta x.$$

Помоћу симбола Σ (сигма) последња формула се може записати на следећи начин: ← Површина степенасте фигуре

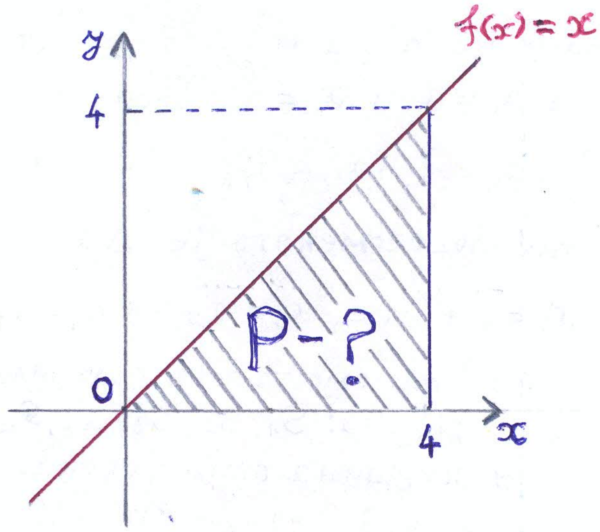
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x.}$$

Јасно је да уколико повећавамо број n, тј. уколико повећавамо број подсегмената сегмента $[a,b]$, онда ће се површина одговарајуће степенасте фигуре све мање разликовати од површине испод графика функције. На основу свега реченог добијамо израз за рачунање површине испод графика функције $y=f(x)$:

$$\boxed{P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x} \;\ldots(*)$$

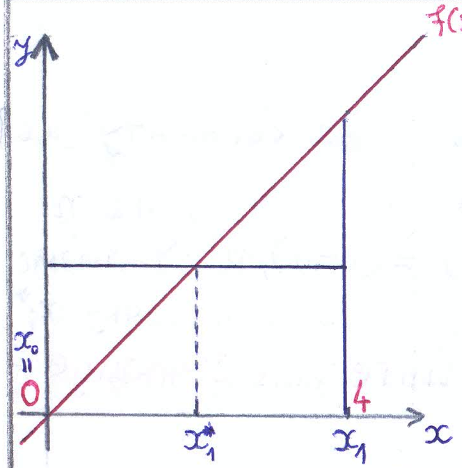
Треба напоменути да је избор тачака x_i^* потпуно произвољан, резултат P неће зависити од тога.

Пример. Наћи површину испод графика функције $f(x)=x$ која је ограничена правама $x=0$ и $x=4$.



$a=0$
$b=4$

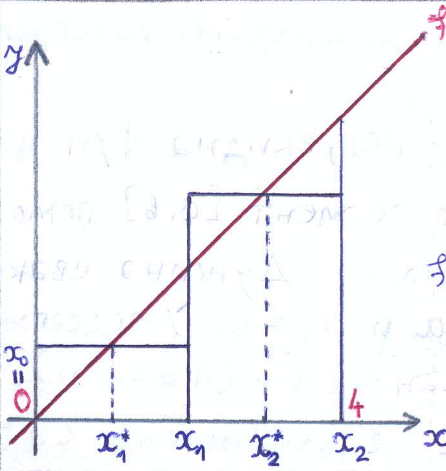
Фигура чију површину рачунамо је једнакокраки правоугли троугао. Катете овог троугла су, дакле, једнаке и износе 4 јединице свака. Имамо: $P=\frac{4\cdot 4}{2}$, $P=8$. Сада ћемо до овог резултата доћи применом формуле (*).



$n=1$

$x_0=0$
$x_1=4$
$\Delta x=4$
$x_1^*=2$
$f(x_1^*)=2$

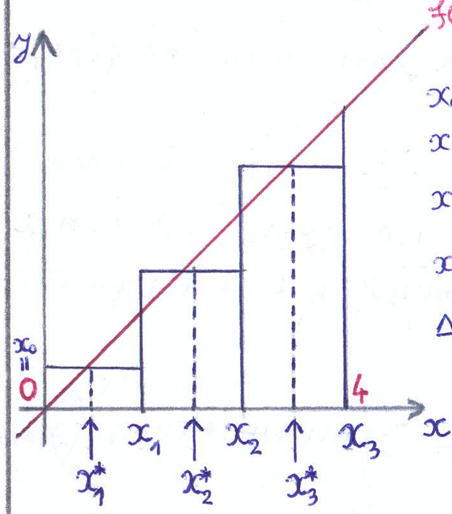
$f(x_1^*)\cdot\Delta x = 2\cdot 4 = 8$



$n=2$

$x_0=0$
$x_1=2,\ x_1^*=1$
$x_2=4,\ x_2^*=3$
$\Delta x=2$
$f(x_1^*)=1,\ f(x_2^*)=3$

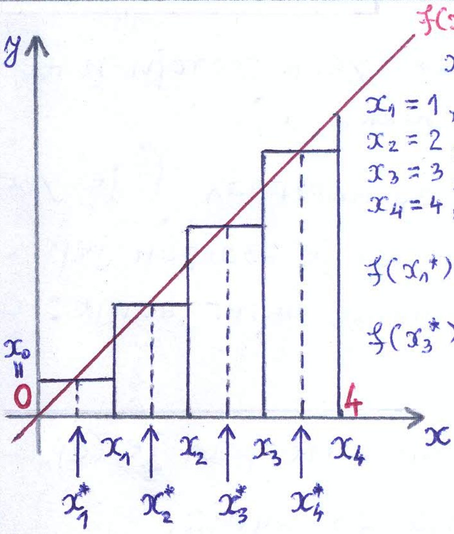
$f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x = 1\cdot 2 + 3\cdot 2 = 8$



$n=3$

$x_0=0$
$x_1=\frac{4}{3},\ x_1^*=\frac{2}{3}$
$x_2=\frac{8}{3},\ x_2^*=2$
$x_3=4,\ x_3^*=\frac{10}{3}$
$\Delta x=\frac{4}{3}$
$f(x_1^*)=\frac{2}{3}$
$f(x_2^*)=2$
$f(x_3^*)=\frac{10}{3}$

$$f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{4}{3} + \frac{10}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{9} + \frac{24}{9} + \frac{40}{9} = 8$$

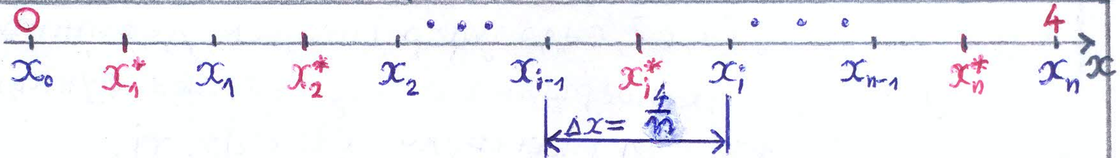


$n=4$

$x_0=0$
$x_1=1,\ x_1^*=\frac{1}{2}$
$x_2=2,\ x_2^*=\frac{3}{2}$ $\quad\Delta x=1$
$x_3=3,\ x_3^*=\frac{5}{2}$
$x_4=4,\ x_4^*=\frac{7}{2}$
$f(x_1^*)=\frac{1}{2},\ f(x_2^*)=\frac{3}{2},$
$f(x_3^*)=\frac{5}{2},\ f(x_4^*)=\frac{7}{2}$

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\Delta x = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + f(x_4^*)\Delta x = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{5}{2}\cdot 1 + \frac{7}{2}\cdot 1 = \frac{16}{2} = 8$$

Општи случај:



$x_0=0$
$x_1=0+\Delta x = 1\cdot\Delta x$
$x_2=x_1+\Delta x = 2\cdot\Delta x$
$\vdots$
$x_{i-1}=(i-1)\cdot\Delta x$
$x_i = i\cdot\Delta x$
$\Delta x=\frac{4}{n}$

$$x_i^*=\frac{1}{2}\left(x_{i-1}+x_i\right)=\frac{1}{2}\Big((i-1)\Delta x + i\Delta x\Big)=\frac{2i-1}{2}\Delta x,$$

$$x_i^*=\frac{2i-1}{2}\cdot\frac{4}{n}=\frac{2}{n}(2i-1),\quad f(x_i^*)=\frac{2}{n}(2i-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}(2i-1)\cdot\frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^2}(2i-1) =$$

$$=\frac{8}{n^2}\cdot\boxed{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)} = \frac{8}{n^2}\cdot n^2 = 8$$

$1=1^2$
$1+3=2^2$
$1+3+5=3^2$
$1+3+5+7=4^2$
$1+3+5+7+9=5^2$

$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} 8 = 8$$

*Дефиниција одређеног интеграла

Нека је f непрекидна функција дефинисана на сегменту $[a,b]$. Поделићемо сегмент $[a,b]$ помоћу тачака $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ на n једнаких делова. Дужина сваког дела је $\Delta x = (b-a)/n$. Узимамо да је $x_0 = a$ и $x_n = b$. У подсегменту $[x_{i-1}, x_i]$ изаберимо тачку x_i^* на произвољан начин ($1 \le i \le n$). Одређени интеграл функције f од a до b је дефинисан са:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x} \dots (**)$$

Лимес у (**) увек постоји и његова вредност је увек иста без обзира на избор тачака x_i^*.

1° Симбол за интеграл $\int$ је увео Лајбниц. То је издужено слово S и такав симбол је изабран јер је интеграл лимес сума. Бројеви a и b су границе интеграције: a је доња граница и b је горња граница.

2° Одређени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ је број; неодређени интеграл $\int f(x)dx$ је фамилија функција.

3° Сума $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ се назива Риманова сума. Ако је функција f позитивна на $[a,b]$, онда упоређивањем дефиниција (*) и (**) закључујемо да је површина испод графика функције f од a до b једнака одређеном интегралу $\int_a^b f(x)dx$, тј.

$$\boxed{P = \int_a^b f(x)dx}.$$

Наравно, можемо посматрати одређени интеграл функција које нису позитивне на целом сегменту $[a,b]$. У том случају, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ се не може интерпретирати као површина ограничена графиком функције f, x-осом и правама $x=a$ и $x=b$.

* Особине одређеног интеграла

1° Ако је $a=b$, онда је $\Delta x=0$, па дефиниција (**) даје:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

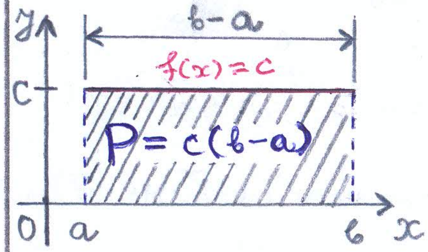
2° $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, где је c произвољна константа.

У овом случају је $f(x)=c$. Као и раније, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Пошто је f константна функција на $[a,b]$, онда је $f(x_i^*)=c$ за свако i.

Риманова сума има облик: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} c\Delta x =$

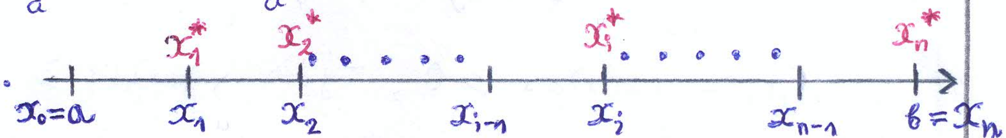
$$= \underbrace{c\Delta x}_{1} + \underbrace{c\Delta x}_{2} + \dots + \underbrace{c\Delta x}_{n} = nc\Delta x = n\cdot c\cdot \frac{b-a}{n} = c(b-a).$$

$$\int_a^b c\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n\to\infty} c(b-a) = c(b-a).$$



Ако је $c>0$, онда је $\int_a^b c\,dx$ површина шрафираног правоугаоника.
Следи да је $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, као што смо већ малопре израчунали.

3° $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$, где су f и g непрекидне функције на $[a,b]$.



$$\int_a^b \underbrace{[f(x)+g(x)]}\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*)+g(x_i^*)]\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)+g(x_i)]\Delta x$$

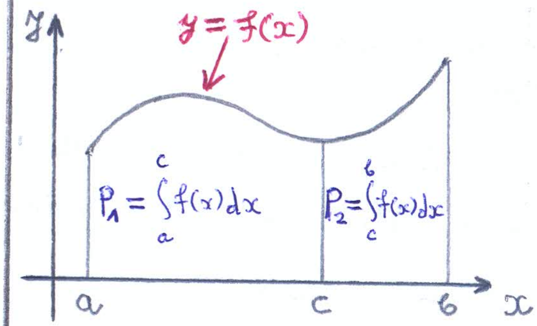
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)\Delta x + g(x_i)\Delta x] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x_i\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

$4^\circ \quad \int_a^b c f(x) = c\int_a^b f(x)\,dx$

$5^\circ \quad \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

$6^\circ \quad \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$



Ако је $f(x)\geq 0$ и $a<c<b$, онда се формула 6° може добити помоћу слике.

P – површина ограничена графиком функције f, x-осом и правама $x=a$ и $x=b$.

$$P = P_1 + P_2, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

7° Ако је $f(x)\geq 0$ за $a\leq x\leq b$, онда је $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Ако је $f(x)\geq 0$, онда $\int_a^b f(x)\,dx$ представља површину испод графика функције f. Како је површина увек позитиван број, онда је $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.

8° Ако је $f(x)\geq g(x)$ за $a\leq x\leq b$, онда је $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Следи да је $f(x)-g(x)\geq 0$ за $a\leq x\leq b$. Применом особине 7° на функцију $f(x)-g(x)$ добијамо $\int_a^b [\underbrace{f(x)-g(x)}]\,dx \geq 0$. Помоћу особине 5° трансформишемо леву страну ове неједнакости:

$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$, тј. $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

9° Ако је $m\leq f(x)\leq M$ за $a\leq x\leq b$, онда је

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

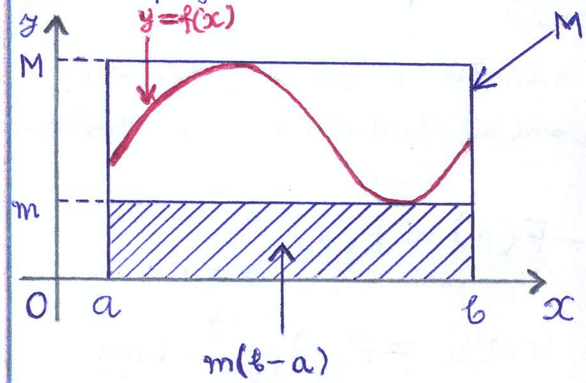
Из $m \le f(x) \le M$ и особине 8° добијамо

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Помоћу особине 2° рачунамо интеграле $\int_a^b m\,dx$ и $\int_a^b M\,dx$:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Геометријска интерпретација када је $f(x) \ge 0$:



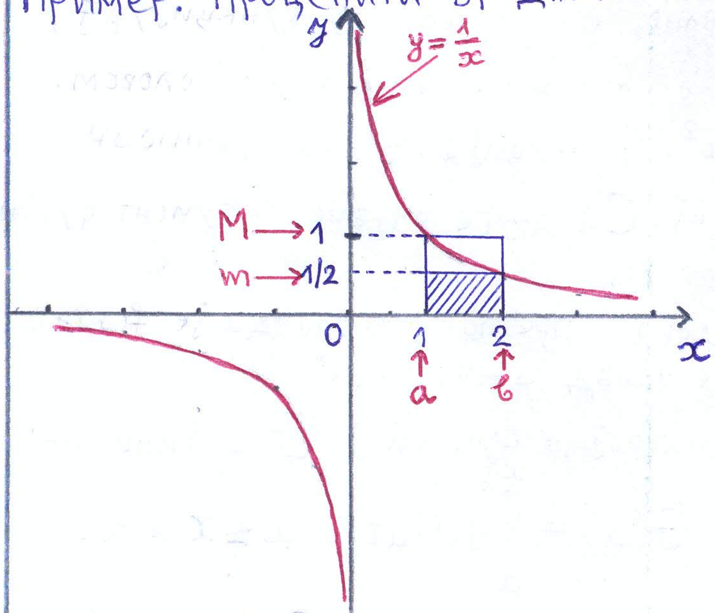
m - апсолутни минимум функције f на сегменту $[a,b]$

M - апсолутни максимум функције f на сегменту $[a,b]$

Површина испод графика функције f већа је од површине правоугаоника са висином m, а мања је од површине правоугаоника са висином M, тј.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Пример. Проценити вредност интеграла $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.



Користимо особину 9°.

Функција $f(x) = \frac{1}{x}$ је позитивна на сегменту $[1,2]$.

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 1, \quad x \in [1,2]$$

$$\frac{1}{2}(2-1) \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le 1\cdot(2-1)$$

$$\frac{1}{2} \le \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \le 1 \;\blacksquare$$

* Њутн–Лајбницова формула

Ако је функција f непрекидна на сегменту $[a,b]$, онда је

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где је F примитивна функција функције f на сегменту $[a,b]$, тј. $F' = f$.

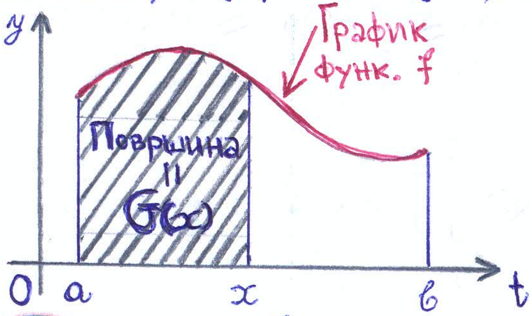
Напомена: Израз $F(b)-F(a)$ који се налази на десној страни Њутн–Лајбницове формуле може се скраћено записати на следеће начине:

$$F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b \quad \text{или} \quad F(b)-F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Њутн–Лајбницова формула постаје: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ или $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Интуитивни доказ: Генерално, ако имамо неку функцију f, онда независну променљиву можемо обележити било којим словом. На пример, $f(x)=x^2$ и $f(t)=t^2$. Функција f је дефинисана правилом: квадрирати задати број. Са друге стране, аргумент функције можемо обележити било којим словом.

Да бисмо лакше скицирали доказ, претпоставимо да је $f(x)\geq 0$ за $x\in[a,b]$ (график функције f је изнад x-осе).

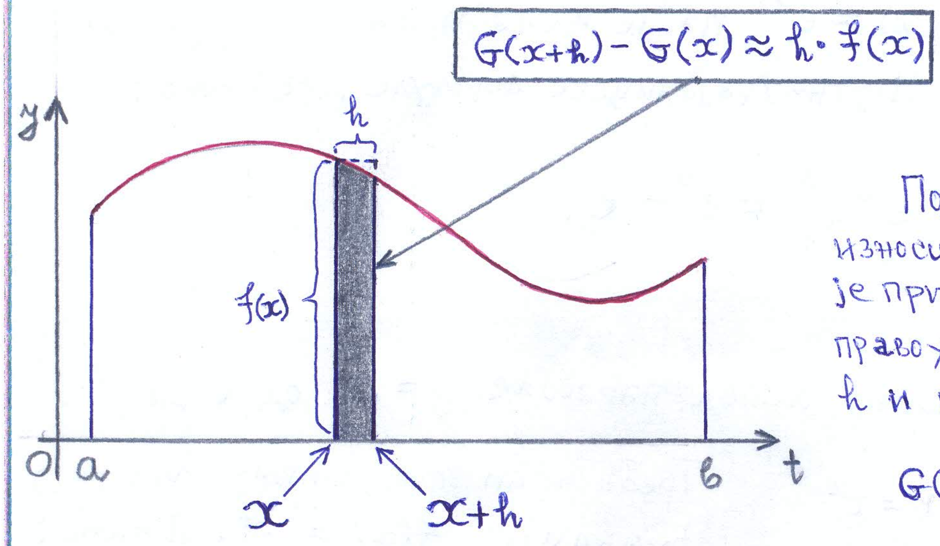


Посматрајмо функцију G дефинисану са

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Ако је x неки конкретан број, онда је и $\int_a^x f(t)dt$ неки одређени број. Кад се x мења, онда и $\int_a^x f(t)dt$ мења своју вредност. $G(x)$ представља површину испод графика функције f од a до x (слика).

$G(x)$ – површина испод графика функције f од a до x;
$G(x+h)$ – површина испод графика функције f од a до $x+h$;



Површина шрафираног појаса износи $G(x+h)-G(x)$. Та површина је приближно једнака површини правоугаоника са основицом h и висином $f(x)$, тј.

$$G(x+h)-G(x) \approx h \cdot f(x).$$

Одавде добијамо $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} \approx f(x)$. Када $h \to 0$, онда знак $\approx$ из претходног израза прелази у знак једнакости:

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x), \qquad \boxed{G'(x) = f(x),\ a < x < b.}$$

Дакле, функција G је примитивна функција функције f на сегменту $[a,b]$. Како је и F примитивна функција функције f на $[a,b]$, онда мора бити:

$$F(x) = G(x) + C, \quad a \le x \le b.$$

Приметимо да је $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Сада имамо:

$$F(b) - F(a) = \big(G(b)+C\big) - \big(G(a)+C\big) = G(b) + C - G(a) - C =$$
$$= G(b) - \underbrace{G(a)}_{0} = G(b) = \int_a^b f(t)\,dt. \text{ Коначно,}$$

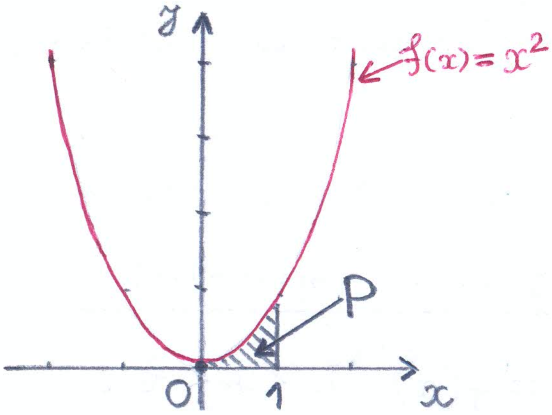
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \ ■$$

Пример. Израчунати $\int_1^3 e^x dx$.

У овом примеру је $f(x) = e^x$, па је њена примитивна функција $F(x) = e^x$. Помоћу Њутн-Лајбницове формуле добијамо:

$$\int_1^3 e^x dx = F(x)\Big|_1^3 = e^x\Big|_1^3 = e^3 - e.$$

Пример. Наћи површину испод параболе $y = x^2$ од 0 до 1.



Треба наћи примитивну функцију функције $f(x) = x^2$. Имамо:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

$$\int x^2 dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} + C}_{\text{фамилија примитивних функција функције } f(x)=x^2}.$$

Због једноставности, бирамо $C = 0$, па је $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

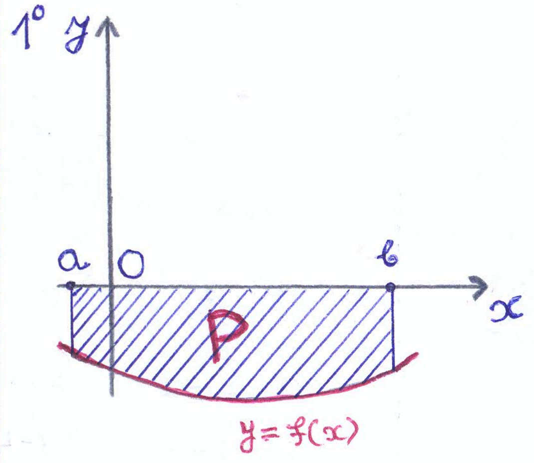
$$P = \int_0^1 x^2 dx = F(x)\Big|_0^1 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Пример. Израчунати $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

Овде је $f(x) = \frac{1}{x}$. Знамо: $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, $x > 0$. Узимамо $F(x) = \ln x$.

$$\int_3^6 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_3^6 = \ln 6 - \ln 3 = \ln \frac{6}{3} = \ln 2.$$

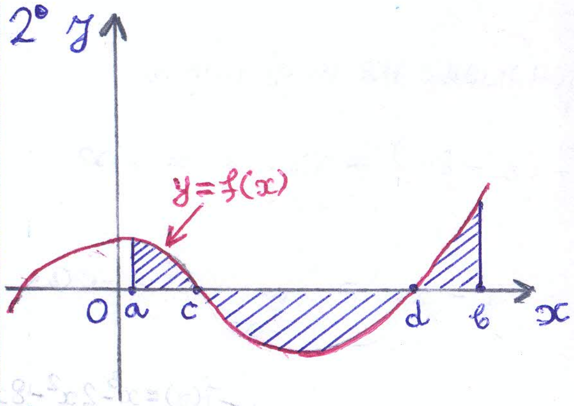
* Примена одређеног интеграла на рачунање површина

1° 

$f(x)$ је непрекидна на $[a, b]$,

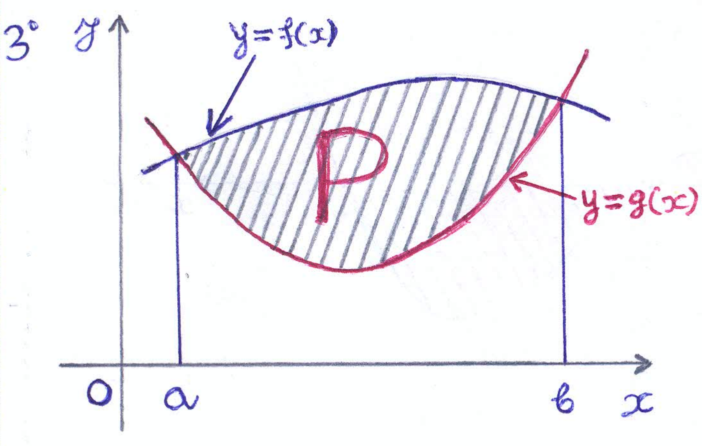
$f(x) \leq 0$ за $a \leq x \leq b$

$$\boxed{P = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|}$$

2° 

Функција $f(x)$ мења знак на сегменту $[a, b]$

$$\boxed{P = \int_a^c f(x)\,dx + \left| \int_c^d f(x)\,dx \right| + \int_d^b f(x)\,dx}$$

3° 

$f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ за $a \leq x \leq b$

$f(x) \geq g(x)$ за $a \leq x \leq b$

$P =$ [Површина испод криве $y = f(x)$] − [Површина испод криве $y = g(x)$]

$$\boxed{P = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

Пример. Наћи површину између криве $y = x^3 - 2x^2 - 8x$ и x-осе.

Пре свега, потребно је скицирати график функције $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$. Функција f је полином трећег степена.

* Нуле полинома

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x = x \cdot \underbrace{(x^2 - 2x - 8)}_{}\,;$$

Овај квадратни трином треба раставити на чиниоце

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ x_{1/2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot(-8)}}{2} \\ x_{1/2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} \\ x_1 = -2,\ x_2 = 4 \\ x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4) \end{cases}$$

Сада имамо: $f(x) = x(x+2)(x-4)$

$f(x) = 0$ кад је $x = 0$ или $x + 2 = 0$ или $x - 4 = 0$. Нуле функције су $x = 0$, $x = -2$ и $x = 4$.

* Таблица са вредностима

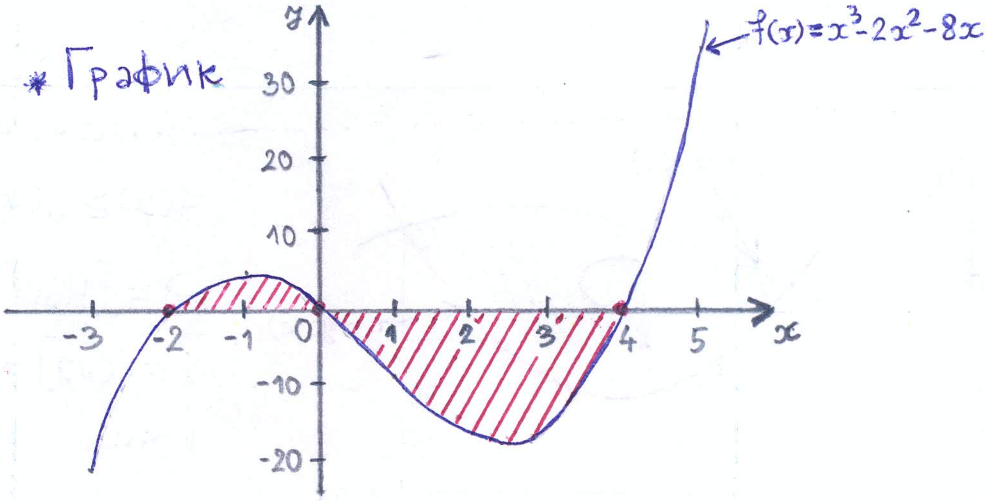
x	$f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$
-3	-21
-2	0
-1	5
0	0
1	-9
4	0
5	35

* Понашање на крајевима

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 2x^2 - 8x) = \lim_{x\to\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 2x^2 - 8x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

* График



$$P = \int_{-2}^{0}(x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx + \left|\int_{0}^{4}(x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx\right|$$

Треба наћи примитивну функцију функције $f(x)=x^3-2x^2-8x$.

$$\int \underbrace{(x^3-2x^2-8x)}_{f(x)}dx=\int x^3dx-2\int x^2dx-8\int x\,dx=$$
$$=\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}-8\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-4x^2+C.$$

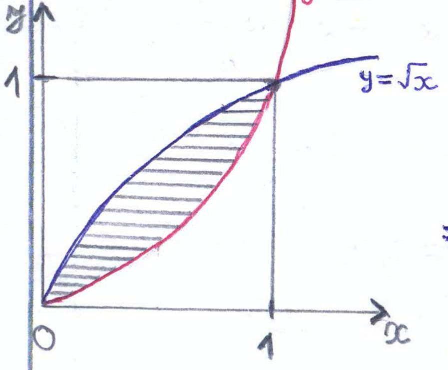
Добили смо: $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-4x^2$

$$\int_{-2}^{0}\underbrace{(x^3-2x^2-8x)}_{f(x)}dx=F(x)\Big|_{-2}^{0}=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-4x^2\right)\Big|_{-2}^{0}=$$
$$=\underbrace{\left(\frac{0^4}{4}-\frac{2\cdot0^3}{3}-4\cdot0^2\right)}_{0}-\left(\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2(-2)^3}{3}-4\cdot(-2)^2\right)=$$
$$=-\left(4+\frac{16}{3}-16\right)=-4-\frac{16}{3}+16=12-\frac{16}{3}=\frac{36}{3}-\frac{16}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3};$$

$$\int_{0}^{4}\underbrace{(x^3-2x^2-8x)}_{f(x)}dx=\underbrace{\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-4x^2\right)}_{F(x)}\Big|_{0}^{4}=\frac{4^4}{4}-\frac{2\cdot4^3}{3}-4\cdot4^2=$$
$$=4^3-\frac{2\cdot64}{3}-4^3=-\frac{128}{3}=-42\frac{2}{3};$$

$$P=6\frac{2}{3}+\left|-42\frac{2}{3}\right|=6\frac{2}{3}+42\frac{2}{3}=49\frac{1}{3}\ \blacksquare$$

Пример. Израчунати површину између кривих $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$.



Функције се секу у тачки $(1,1)$.

$$P=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\int_0^1x^2dx=$$
$$=\int_0^1x^{1/2}dx-\int_0^1x^2dx=\frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=$$
$$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\left(\frac{2}{3}-0\right)-\left(\frac{1}{3}-0\right)=$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3};\quad P=\frac{1}{3}\ \blacksquare$$

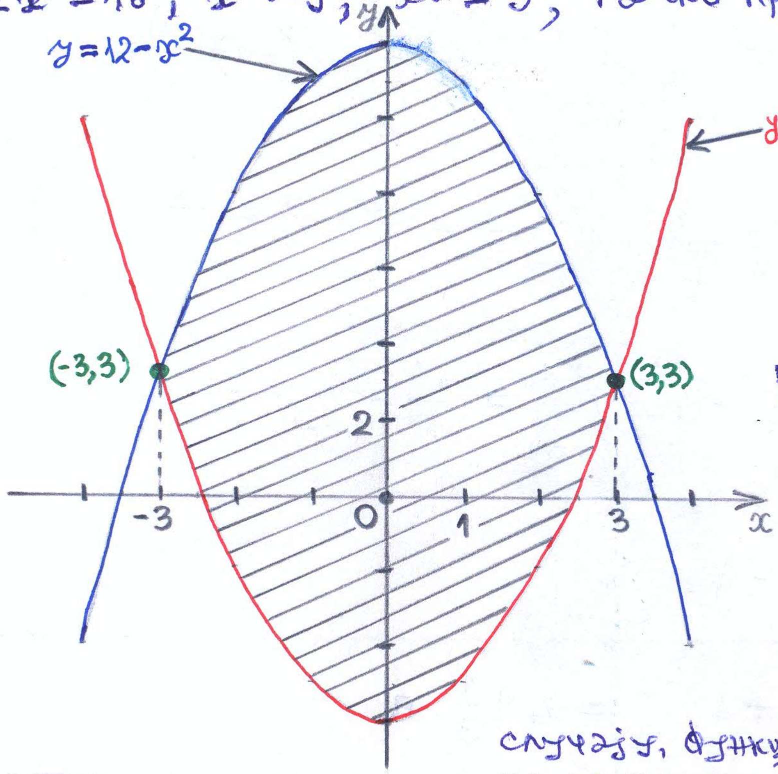
Пример. Скицирати област коју ограничавају параболе $y=12-x^2$ и $y=x^2-6$, и потом израчунати њену површину.

Парабола $y=12-x^2$ има конкавни облик $\cap$, док парабола $y=x^2-6$ има конвексни облик $\cup$. Нађимо нуле и једне и друге функције, тј. нађимо тачке где параболе секу x-осу.

$12-x^2=0$
$x^2=12$, $x=\pm\sqrt{12}$
$x=\pm 2\sqrt{3}$, $x\approx\pm 3{,}46$

$x^2-6=0$
$x^2=6$, $x=\pm\sqrt{6}$
$x\approx\pm 2{,}45$

Нађимо сада и тачке у којима се параболе секу: $x^2-6=12-x^2$, $2x^2=18$, $x^2=9$, $x=\pm 3$; тачке пресека су $(-3,3)$ и $(3,3)$.



Шрафирана област (P) је симетрична у односу на y-осу, тако да је довољно наћи површину дела који се налази десно од y-осе, и онда тај број помножити са 2.

$$P=2\cdot\int_0^3\left[(12-x^2)-(x^2-6)\right]dx$$

Напомена: Формула коју смо дали код случаја 3° на стр. 11 се може применити и када нека од функција f и g није позитивна на целом посматраном сегменту. У овом случају, функција $y=x^2-6$ је негативна на интервалу $(0,\sqrt{6})$, и позитивна је на интервалу $(\sqrt{6},3)$.

$$P=2\cdot\int_0^3(18-2x^2)dx=2\cdot\left[\int_0^3 18dx-\int_0^3 2x^2dx\right]=2\cdot\left[18\int_0^3dx-2\int_0^3x^2dx\right]$$

$$=2\cdot\left[18\cdot\left(x\Big|_0^3\right)-2\cdot\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3\right)\right]=2\cdot\left[18\cdot(3-0)-2\cdot\left(\frac{3^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)\right]$$

$$=2\cdot\left[18\cdot 3-2\cdot 9\right]=2\cdot(54-18)=2\cdot 36=72;\quad P=72$$

Како применити одређени интеграл – општа стратегија

Нека је f непрекидна функција дефинисана на сегменту $[a,b]$. Ако сегмент $[a,b]$ поделимо на n једнаких делова помоћу тачака $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ $(x_0 = a, x_n = b)$, и ако у сваком подсегменту $[x_{i-1}, x_i]$ изаберемо тачку x_i^* $(i = 1, 2, \dots, n)$, онда се израз

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

назива Риманова сума функције f. Овде је $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ и то је дужина сваког од подсегмената $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots n$. Одређени интеграл функције f на сегменту $[a,b]$ је лимес низа Риманових сума када $n \to \infty$, тј.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Управо последњи израз (то је дефиниција одређеног интеграла) користимо приликом решавања практичних проблема. Стратегија се може поделити на три корака:

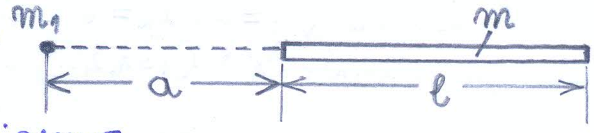
1. Величину коју желимо да израчунамо изражавамо на приближан начин помоћу Риманове суме неке функције f на сегменту $[a,b]$. Из самог контекста се закључује о којој функцији f и о ком сегменту $[a,b]$ је реч.

2. Схватамо да се тачна вредност тражене величине добија када сегмент $[a,b]$ делимо на све ситније делове, тј. тражена вредност је $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$. Сада уместо $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ пишемо $\int_a^b f(x)dx$, и то значи да је тражена величина дата одређеним интегралом $\int_a^b f(x)dx$.

3. Решавање интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Пример. (Гравитациона сила)

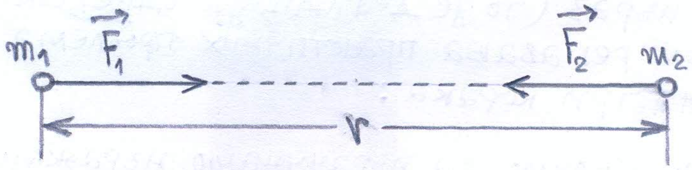
Танак хомоген прав штап, дужине ℓ и масе m, налази се на растојању a од сферне куглице масе m_1. Израчунати гравитациону силу узајамног дејства ова два тела.



Подсетник. Интензитет гравитационе силе којом се узајамно привлаче материјалне тачке (материјалне тачке су тела веома малих димензија) маса m_1 и m_2 је

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2},$$

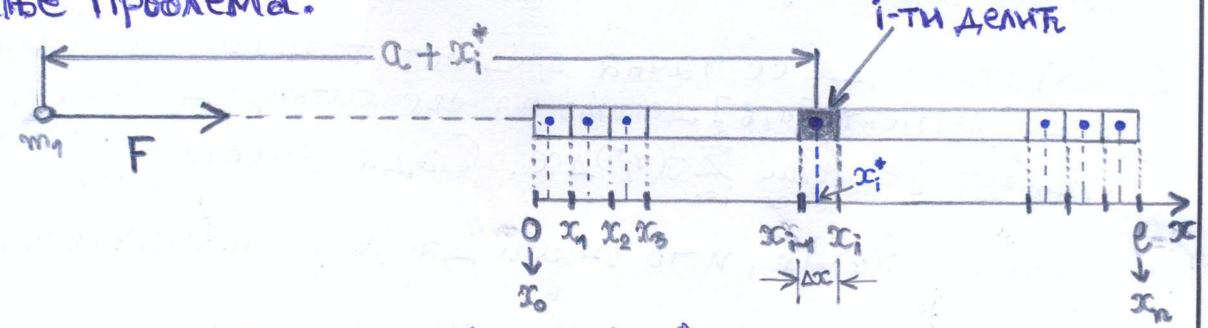
где је γ гравитациона константа и r је растојање између материјалних тачака.



Слика: $|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|=\gamma\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}$

Решавање проблема.

1.



Штап је подељен на n делића (слика). Сваки од тих делића се може третирати као материјална тачка. Дужине свих делића су једнаке и износе $\Delta x=\ell/n$. Такође, масе свих делића су једнаке Δm. Масу Δm налазимо из пропорције $m:\ell=\Delta m:\Delta x$; $\Delta m=\frac{m}{\ell}\Delta x$. Гравитациона сила којом i-ти делић штапа привлачи материјалну тачку масе m_1 износи $\gamma\frac{m_1\cdot\Delta m}{(a+x_i^*)^2}=\gamma\frac{mm_1}{\ell}\frac{\Delta x}{(a+x_i^*)^2}$.

Укупна гравитациона сила којом штап привлачи масу m_1 једнака је збиру свих гравитационих сила које потичу од узајамног привлачења сваког од n делића са масом m_1.

Дакле:

$$F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma m m_1}{\ell}\frac{1}{(a+x_i^*)^2}\Delta x.$$

На десној страни последње формуле препознајемо Риманову суму функције $f(x)=\frac{\gamma m m_1}{l}\frac{1}{(a+x)^2}$ на сегменту $[0,l]$.

2. Већу тачност ћемо добити ако је број делића све већи и већи. У том случају димензије делића су све мање, па се они са већим правом могу третирати као материјалне тачке. Имамо:

$F=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma m m_1}{l}\frac{1}{(a+x_i^*)^2}\Delta x$, односно $F=\int_0^l\frac{\gamma m m_1}{l}\frac{1}{(a+x)^2}dx$.

3. $F=\int_0^l\frac{\gamma m m_1}{l}\frac{1}{(a+x)^2}dx=\frac{\gamma m m_1}{l}\int_0^l\frac{1}{(a+x)^2}dx$.

* Решавање интеграла $\int\frac{1}{(a+x)^2}dx$: Смена $t=a+x$, $dt=dx$.

$$\int\frac{1}{(a+x)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-2}dt=\frac{t^{-2+1}}{-2+1}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{a+x};\quad \int\frac{1}{(a+x)^2}dx=-\frac{1}{a+x}.$$

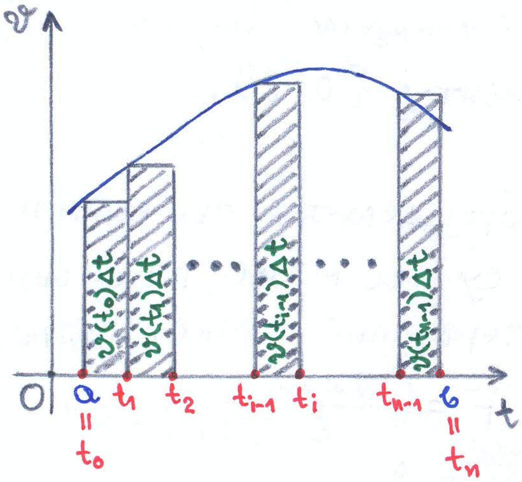
$$F=\frac{\gamma m m_1}{l}\int_0^l\frac{1}{(a+x)^2}dx=\frac{\gamma m m_1}{l}\cdot\left(-\frac{1}{a+x}\Big|_0^l\right)=\frac{\gamma m m_1}{l}\left(-\frac{1}{a+l}-\left(-\frac{1}{a}\right)\right)=$$

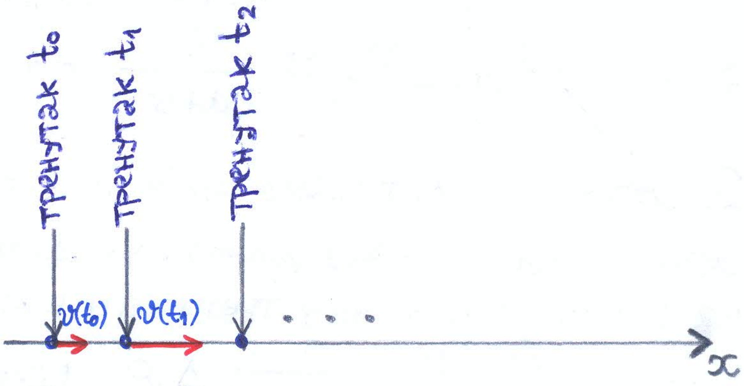
$$=\frac{\gamma m m_1}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)=\frac{\gamma m m_1}{l}\cdot\frac{a+l-a}{a(a+l)}=\frac{\gamma m m_1}{l}\cdot\frac{l}{a(a+l)};$$

$$F=\frac{\gamma m m_1}{a(a+l)}.$$

Пример. (Пређени пут)

Ако се тело креће равномерно праволинијски брзином v, онда за време t пређе пут $s=v\cdot t$. На пример, ако се тело креће брзином $v=90\frac{km}{h}$, онда за $t=3$ сата пређе $s=90\frac{km}{h}\cdot 3h=270\,km$. Међутим, врло често се тело креће праволинијски, али његова брзина се мења са временом. Другим речима, брзина је функција времена, тј. $v=v(t)$. Када је $v(t)>0$, то онда значи да се у тренутку t тело креће с леве на десну страну; када је $v(t)<0$, то значи да се у тренутку t тело креће са десне на леву страну; тело мирује у тренутку t ако је $v(t)=0$. Јасно је да једно тело може да мења смер кретања: у неким тренуцима је $v(t)>0$, а у неким другим тренуцима је $v(t)<0$.





Посматрајмо, због једноставности, случај када је $v(t)>0$ све време кретања - све време тело се креће са леве на десну страну (две слике изнад). Претпоставимо да желимо да израчунамо пут који тело пређе од тренутка $t_0=a$ до тренутка $t_n=b$. Поделићемо сегмент $[a,b]$ на n једнаких делова помоћу тачака (тренутака) $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Имамо:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_i - t_{i-1} = \cdots = t_n - t_{n-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Током првог временског интервала $[t_0, t_1]$ брзина се мења. Ако је тај интервал довољно мали (n је велики број), онда можемо сматрати да се брзина тела значајно не мења и да током тог интервала износи $v(t_0)$. То значи да се током интервала $[t_0, t_1]$ тело креће равномерно праволинијски са брзином $v(t_0)$, па пређени пут током тог интервала износи $v(t_0)\Delta t$. Слично, можемо узети да се током другог интервала $[t_1, t_2]$ тело креће равномерно праволинијски брзином $v(t_1)$, и пређени пут у овом случају износи $v(t_1)\Delta t$. Укупни пређени пут током временског интервала $[a,b]$ износи приближно:

$$s \approx v(t_0)\Delta t + v(t_1)\Delta t + \cdots + v(t_{n-1})\Delta t.$$

Уведимо следеће ознаке: $t_0 = t_1^*,\ t_1 = t_2^*, \dots, t_{i-1} = t_i^*, \dots, t_{n-1} = t_n^*$.

Добијамо: $s \approx v(t_1^*)\Delta t + v(t_2^*)\Delta t + \cdots v(t_n^*)\Delta t = \sum_{i=1}^{n} v(t_i^*)\Delta t.$

Дакле, $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(t_i^*)\Delta t$, тј. пређени пут s је приближно једнак Римановој суми функције $v(t)$ на интервалу $[a,b]$. Тачну вредност за s добијамо када $n \to \infty$:

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v(t_i^*)\Delta t, \text{ односно } \quad s = \int_a^b v(t)\,dt.$$

У овом случају када је $v(t)>0$ све време кретања, пређени пут S, геометријски посматрано, представља површину испод графика функције $v=v(t)$ између a и b.

У општем случају, потребно је уочити интервале на којима је $v(t)>0$ (честица се креће са лева на десно) и на којима је $v(t)<0$ (честица се креће са десна на лево). Ако је, рецимо, на интервалу $[t_1, t_2]$ брзина $v(t)$ негативна, онда је пређени пут на том интервалу $S=\int_{t_1}^{t_2}|v(t)|dt$. Користимо апсолутну вредност јер је величина $\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt$ негативна због $v(t)<0$, а пређени пут је увек позитиван број.

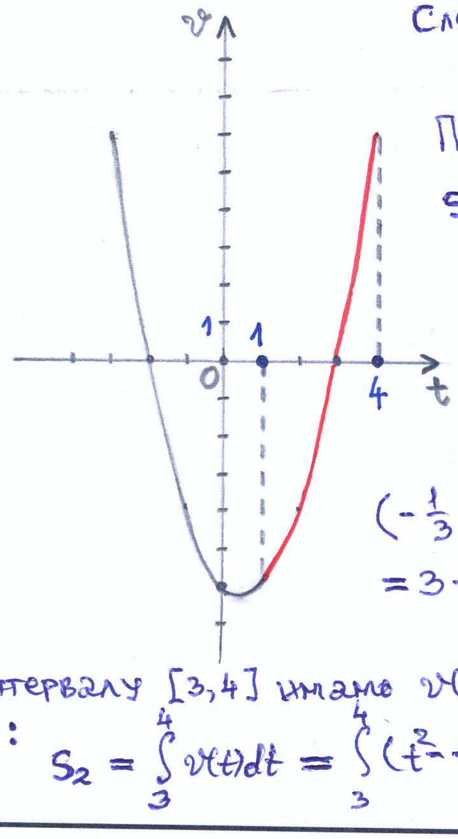
* Честица се креће по правој линији брзином $v(t)=t^2-t-6$ (јединица за брзину овде је m/s). Наћи пут који тело пређе током временског периода $1s \le t \le 4s$.

Скицирајмо график функције $v(t)=t^2-t-6$. Приметимо да се ради о квадратној функцији чији график има облик $\vee$. Нађимо нуле функције:

$$t^2-t-6=0$$

$$t_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2}=\frac{1\pm 5}{2};$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t_1=-2 \\ t_2=3 \end{array}} \longrightarrow t^2-t-6=(t+2)(t-3)$$



* На интервалу $[1,3]$ имамо $v(t)<0$.

Следи: $|v(t)|=-v(t)=-(t^2-t-6)$;

$|v(t)|=-t^2+t+6$;

Пређени пут на интервалу $[1,3]$:

$$S_1=\int_1^3|v(t)|dt=\int_1^3(-t^2+t+6)dt=$$

$$=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+6t\right]\Big|_1^3=\left[-\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+6\cdot 3\right]-$$

$$\left[-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+6\cdot 1\right]=\left(-9+\frac{9}{2}+18\right)-$$

$$\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+6\right)=9+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6=3+\frac{8}{2}+\frac{1}{3}=$$

$$=3+4+\frac{1}{3}=7+\frac{1}{3};$$

* На интервалу $[3,4]$ имамо $v(t)>0$. Пређени пут на овом интервалу износи:

$$S_2=\int_3^4 v(t)dt=\int_3^4(t^2-t-6)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-6t\right]\Big|_3^4=$$

$$=\left[\frac{4^3}{3}-\frac{4^2}{2}-6\cdot 4\right]-\left[\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}-6\cdot 3\right]=\left(\frac{64}{3}-8-24\right)-\left(9-\frac{9}{2}-18\right)=$$

$$=\left(\frac{64}{3}-32\right)-\left(-9-\frac{9}{2}\right)=\frac{64}{3}^{1\cdot 2}-32+9+\frac{9}{2}^{1\cdot 3}=\frac{128}{6}+\frac{27}{6}-23=\frac{155}{6}-23;$$

Укупан пређени пут: $s=s_1+s_2=\left(7+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{155}{6}-23\right)=$

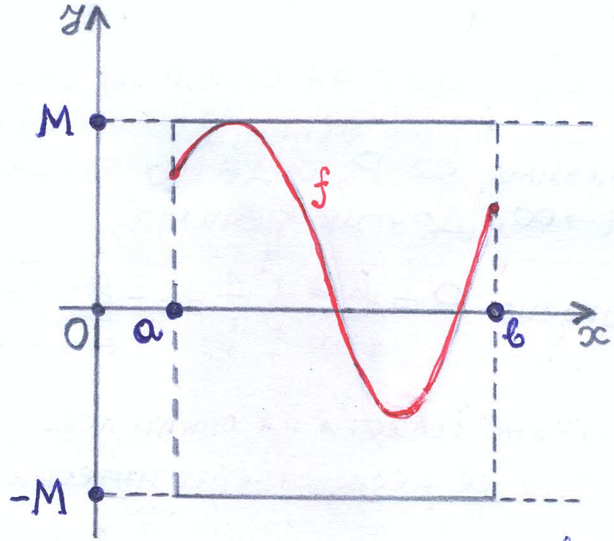
$$=7+\frac{1}{3}^{1\cdot 2}+\frac{155}{6}-23=\frac{157}{6}-16=\frac{157}{6}-\frac{96}{6}=\frac{61}{6};\quad s=\frac{61}{6}\approx 10{,}17\,m \blacksquare$$

* Несвојствени интеграли

Ову секцију ћемо започети дефиницијом ограничене функције.

Дефиниција: Функција f дефинисана на сегменту $[a,b]$ је ограничена ако постоји реалан број $M>0$ тако да важи:

$-M \leq f(x) \leq M$ за сваки број x из сегмента $[a,b]$.



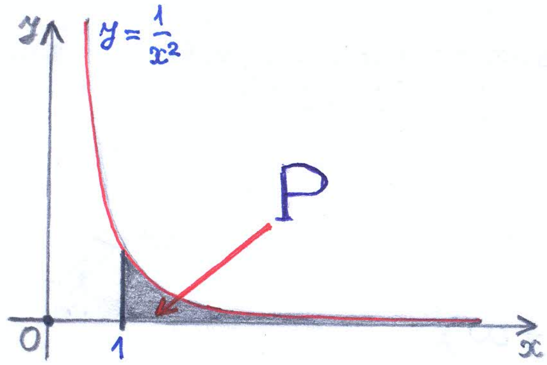
Када смо дефинисали одређени интеграл $\int_a^b f(x)dx$, ми смо сматрали да је $[a,b]$ ограничен интервал (a и b су коначни бројеви) и да је f ограничена функција на $[a,b]$. Сада ћемо проширити појам одређеног интеграла на следећа два случаја:

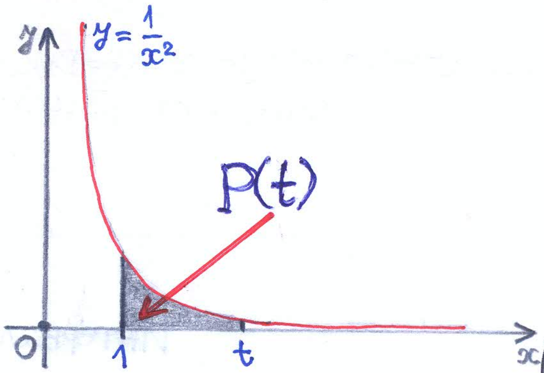
1° Интервал $[a,b]$ је бесконачан;

2° Функција f није ограничена.

У оба случаја, интеграли које будемо дефинисали називају се несвојствени интеграли.

Пример. Израчунајмо површину области која се налази испод графика функције $y=1/x^2$, која је одоздо ограничена x-осом, а са леве стране је ограничена правом $x=1$.





Област чију површину треба наћи није ограничена са десне стране (слика лево). Како онда израчунати њену површину? Узмимо неки број t већи од 1, и нађимо површину испод графика функције $y=\frac{1}{x^2}$ од 1 до t (слика десно). Та површина износи

$$P(t)=\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx.$$

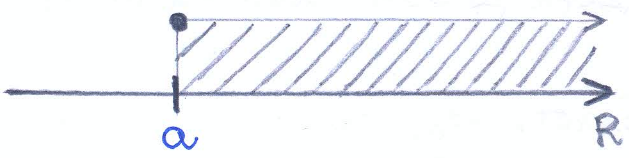
Уколико број t расте, област на слици десно све више личи на осенчану област са слике лево. Ако површину осенчане области на слици лево означимо са P, онда су вредности $P(t)$ све ближе броју P уколико $t\to\infty$. Другим речима,

$P=\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$, односно $P=\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^t\right]=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1.$

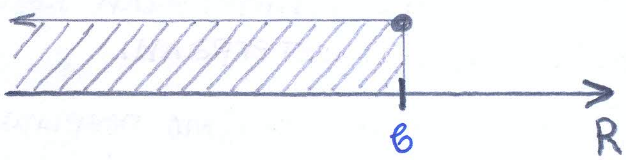
Дакле, површина осенчане области на слици лево је 1. Гранична вредност $\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx$ зове се несвојствени интеграл функције $y=1/x^2$ на интервалу $[1,+\infty)$ и означава се са $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx=1.$$

Приметимо да је интервал $[1,+\infty)$ неограничен. Користећи овај пример можемо дефинисати несвојствени интеграл функције f (функција f не мора обавезно да буде позитивна) на неограниченом интервалу. На слици су дате две врсте неограничених интервала.

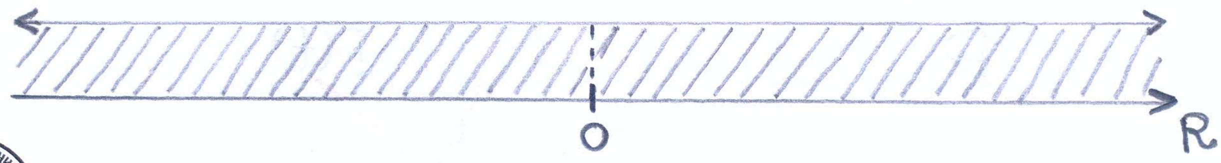


Интервал $[a,+\infty)$



Интервал $(-\infty,b]$

Интервал $(-\infty,+\infty)$ је уствари скуп свих реалних бројева. Приметимо да га чине интервали $(-\infty,0]$ и $[0,+\infty)$.



Интервал $(-\infty,+\infty)$

1° Случај неограниченог (бесконачног) интервала

(а) Ако је вредност интеграла $\int_a^t f(x)dx$ коначна за сваки број $t \geqslant a$, онда је

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx.$$

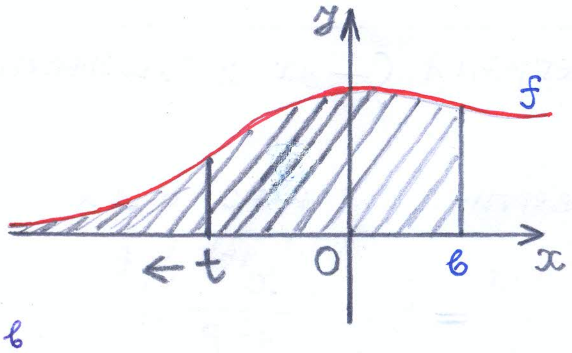
(б) Ако је вредност интеграла $\int_t^b f(x)dx$ коначна за сваки број $t \leqslant b$, онда је

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx.$$

Несвојствени интеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ конвергирају ако су одговарајуће граничне вредности коначни бројеви; ако су те граничне вредности $+\infty$, $-\infty$ или уколико не постоје, тада кажемо да несвојствени интеграли дивергирају.

(в) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx,$$ уколико интеграли на десној страни постоје.

Несвојствени интеграли из дефиниција (а) и (б) се могу интерпретирати као површине уколико је функција f позитивна.



Посматрајмо слику лево. Шрафирану површину означимо са P. Слично као и у малопређашњем примеру,

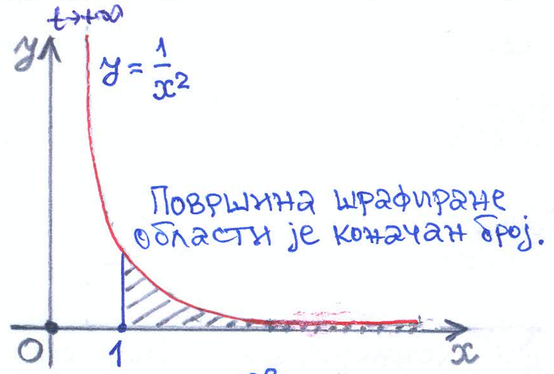
$$P = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx.$$

$\int_t^b f(x)dx$ представља површину испод графика функције f од t до b, и јасно је да ћемо површину P добити када ставимо да $t \to -\infty$.

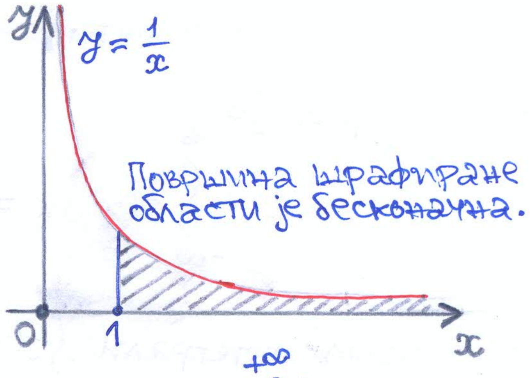
Пример. Испитати да ли интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ конвергира или дивергира.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}(\ln x)\Big|_1^t = \lim_{t\to+\infty}(\ln t - \overbrace{\ln 1}^{0}) =$$

$= \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty$; интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ је дивергентан.



Сл: Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ конвергира и $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = 1$.



Сл: Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ је дивергентан.

Графици функција $y=\frac{1}{x^2}$ и $y=\frac{1}{x}$ су веома слични за $x>0$. Међутим, површина области на слици лево је коначан број и износи 1, док је површина области на слици десно једнака бесконачности. Приметимо да обе функције теже нули кад $x\to+\infty$, али функција $y=1/x^2$ се приближава нули брже него функција $y=1/x$, и у томе налазимо објашњење зашто је једна површина коначан број, а друга бесконачност.

Пример. Испитати конвергенцију интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ у зависности од реалног параметра p.

Већ смо видели да овај интеграл дивергира за $p=1$ и да конвергира за $p=2$. Нека је $p\neq 1$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t}x^{-p}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^t;$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right);$$

1° $\boxed{p>1}$

У овом случају је $1-p<0$, па је $p-1>0$. Имамо:

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^{1-p} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{p-1}} = 0$. Сада је:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = -\frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}.$$

Специјално, за $p=2$ добијамо $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$, а то смо већ показали раније.

2° $\boxed{p<1}$

У овом случају је $1-p>0$, па је $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{1-p} = +\infty$. Добијамо:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right) = +\infty.$$

Према томе:
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{за } p>1 \text{ (Интеграл конвергира)} \\ +\infty & \text{за } p=1 \text{ (Интеграл дивергира)} \\ +\infty & \text{за } p<1 \text{ (Интеграл дивергира)} \end{cases}$$

Пример. Израчунати интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-t}-(-1)\right);$$

$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-e^{-t}\right)$; Како је $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t} = 0$, онда је:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 \quad \blacksquare$$

Пример. Израчунати интеграле $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx$, $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to-\infty}(\operatorname{arctg}x)\Big|_{t}^{0}=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}(\underbrace{\operatorname{arctg}0}_{0}-\operatorname{arctg}t)=\lim_{t\to-\infty}(-\operatorname{arctg}t)=-\lim_{t\to-\infty}\operatorname{arctg}t=$$

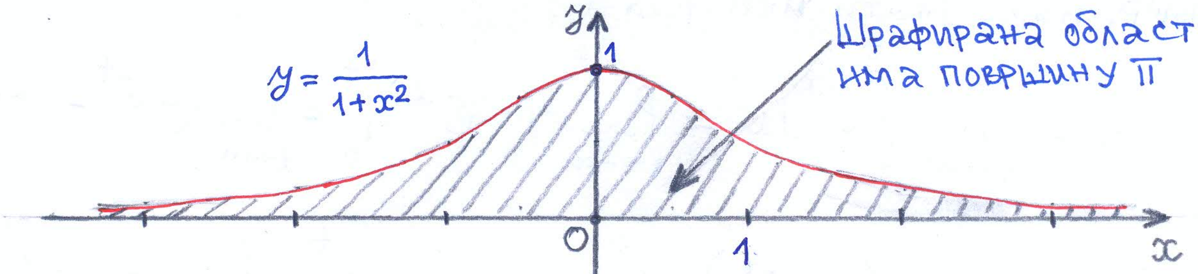
$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Показали смо: $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

Слично: $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}(\operatorname{arctg}x)\Big|_{0}^{t}=$

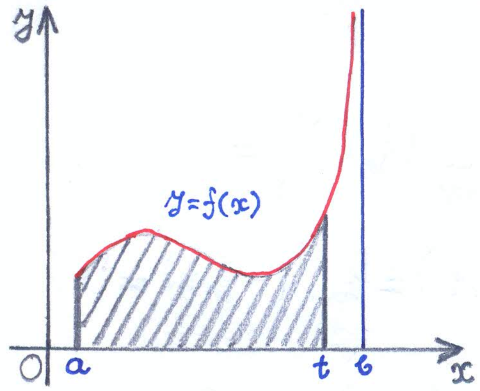
$$=\lim_{t\to+\infty}(\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}0)=\lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}t=\frac{\pi}{2};\quad \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Сада је: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$.



Зато што је $\frac{1}{1+x^2}>0$, несвојствени интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ се може интерпретирати као површина неограничене области која се налази испод криве $y=\frac{1}{1+x^2}$ и изнад x-осе (слика). ■

2° Случај неограничене функције



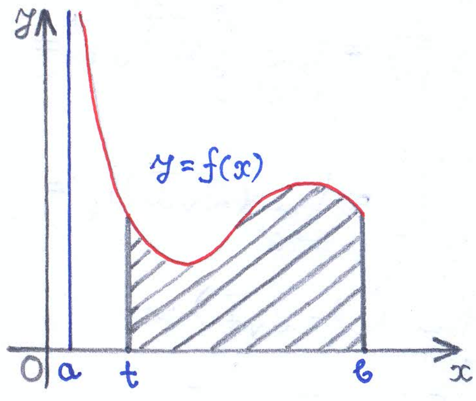
Слика: Случај када је f позитивна функција

(a) Нека је функција f дефинисана на интервалу $[a,b)$ и нека је интеграл $\int_a^t f(x)dx$ коначан број, $a\leq t<b$ (споменути интеграл је коначан за сваки број t са особином $a\leq t<b$). Тада је:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Када је $y=f(x)>0$ на интервалу $[a,b)$, онда несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представља површину неограничене области која се налази испод графика функције f и изнад x-осе (слика).
Шрафирана површина износи $\int_a^t f(x)dx$, и уколико желимо да нађемо површину неограничене области онда треба узети $t\to b^-$, дакле:

$$\text{Површина неограничене области} = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$



(б) Нека је функција f дефинисана на интервалу $(a,b]$ и нека је интеграл $\int_t^b f(x)dx$ коначан број за сваки број t такав да је $a<t\leq b$. Тада је:

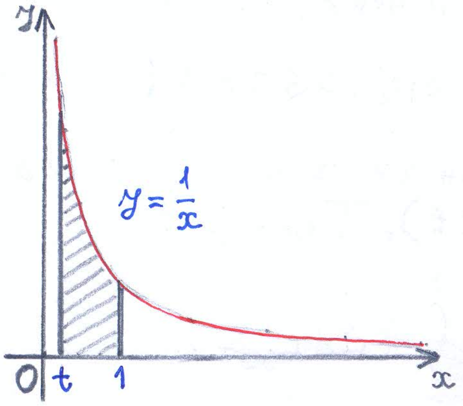
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx.$$

Слика: f је позитивна функ.

Када је f позитивна функција на интервалу $(a,b]$, онда $\int_a^b f(x)dx$ представља површину неограничене области испод графика функције f и изнад x-осе (слика).

И у случају (a) и у случају (б), несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ је конвергентан ако одговарајућа гранична вредност постоји; интеграл $\int_a^b f(x)dx$ је дивергентан уколико лимес не постоји или је једнак $\pm\infty$.

Пример. Израчунати $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.



Слика: Функција $y=1/x$ је неограничена на $(0,1]$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} \int\limits_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+} (\ln x)\Big|_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} (\underbrace{\ln 1}_{0} - \ln t) = \lim_{t\to 0^+} (-\ln t) =$$

$$= -\underbrace{\lim_{t\to 0^+} \ln t}_{-\infty} = -(-\infty) = +\infty.$$

Несвојствени интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ је дивергентан.

Пример. Израчунати $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Увек је корисно скицирати график подинтегралне функције. У овом случају подинтегрална функција је $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Домен функције f је $\mathcal{D}(f)=(0,+\infty)$. Такође, $f(x)>0$ за сваки број x из домена функције f, и то значи да се график функције f налази у I квадранту. Даље, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$. Закључујемо да је y-оса вертикална асимптота и да је x-оса хоризонтална асимптота графика функције f.

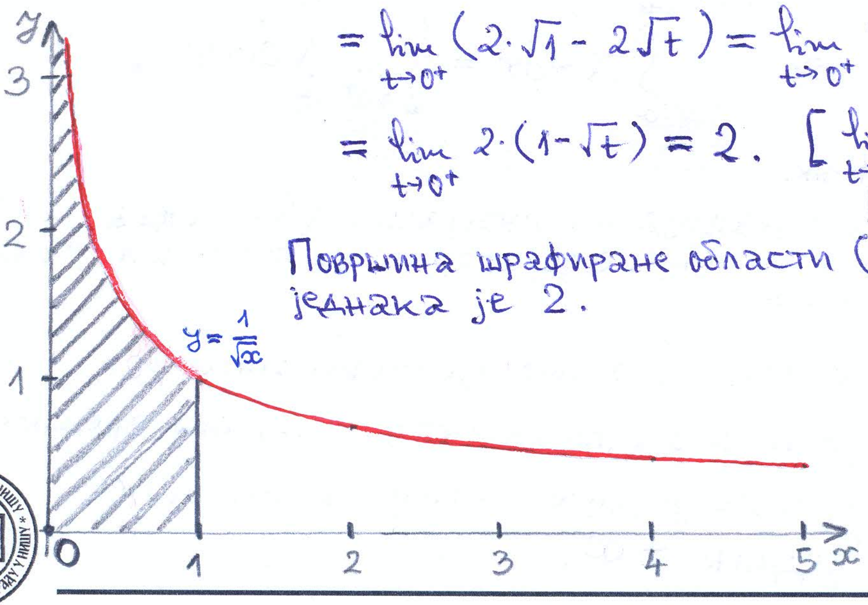
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	5	2
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	3	2	1	0,5	0,45	0,7

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int\limits_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int\limits_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} (2\sqrt{x})\Big|_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} (2\cdot\sqrt{1} - 2\sqrt{t}) = \lim_{t\to 0^+} (2-2\sqrt{t}) =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} 2\cdot(1-\sqrt{t}) = 2. \quad \left[\lim_{t\to 0^+}\sqrt{t}=0\right]$$



Површина шрафиране области (област је неограничена) једнака је 2.

Пример. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

У овом примеру подинтегрална функција је $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Домен функције је интервал $\mathcal{D}(f)=(-1,1)$. Функција је позитивна на целом свом домену и парна је – то значи да се њен график налази изнад x-осе и да је симетричан у односу на y-осу. Пресек са y-осом: када је $x=0$, онда је $f(0)=1$; пресек са y-осом се дешава у тачки $(0,1)$.

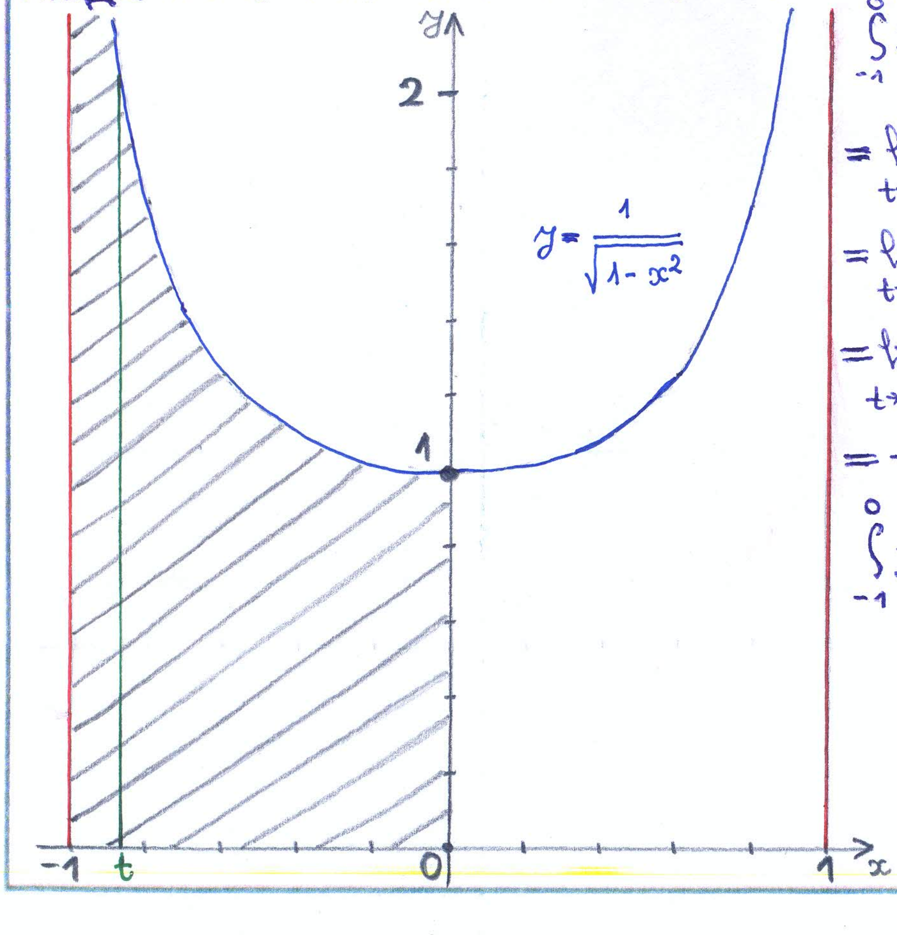
* Асимптоте: $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$. Праве $x=1$ и $x=-1$ су вертикалне асимптоте графика.

* Монотоност и екстремне вредности: $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\dfrac{1'\sqrt{1-x^2}-1\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{1-x^2}=$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)'}{1-x^2}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2};$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}\cdot(1-x^2)}=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}};$$

Израз $(1-x^2)^{3/2}$ је увек позитиван, па знак првог извода зависи само од x. Закључак: $f'(x)>0$ на интервалу $(0,1)$ и $f'(x)<0$ на интервалу $(-1,0)$; f расте на $(0,1)$ и опада на $(-1,0)$. Тачка минимума је $(0,1)$.



$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{t\to -1^+}\int_{t}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\lim_{t\to -1^+}(\arcsin x)\Big|_t^0=$$

$$=\lim_{t\to -1^+}(\underbrace{\arcsin 0}_{0}-\arcsin t)=$$

$$=\lim_{t\to -1^+}(-\arcsin t)=-\boxed{\lim_{t\to -1^+}\arcsin t}=$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Овај лимес износи $-\frac{\pi}{2}$, видети график функције $y=\arcsin x$.